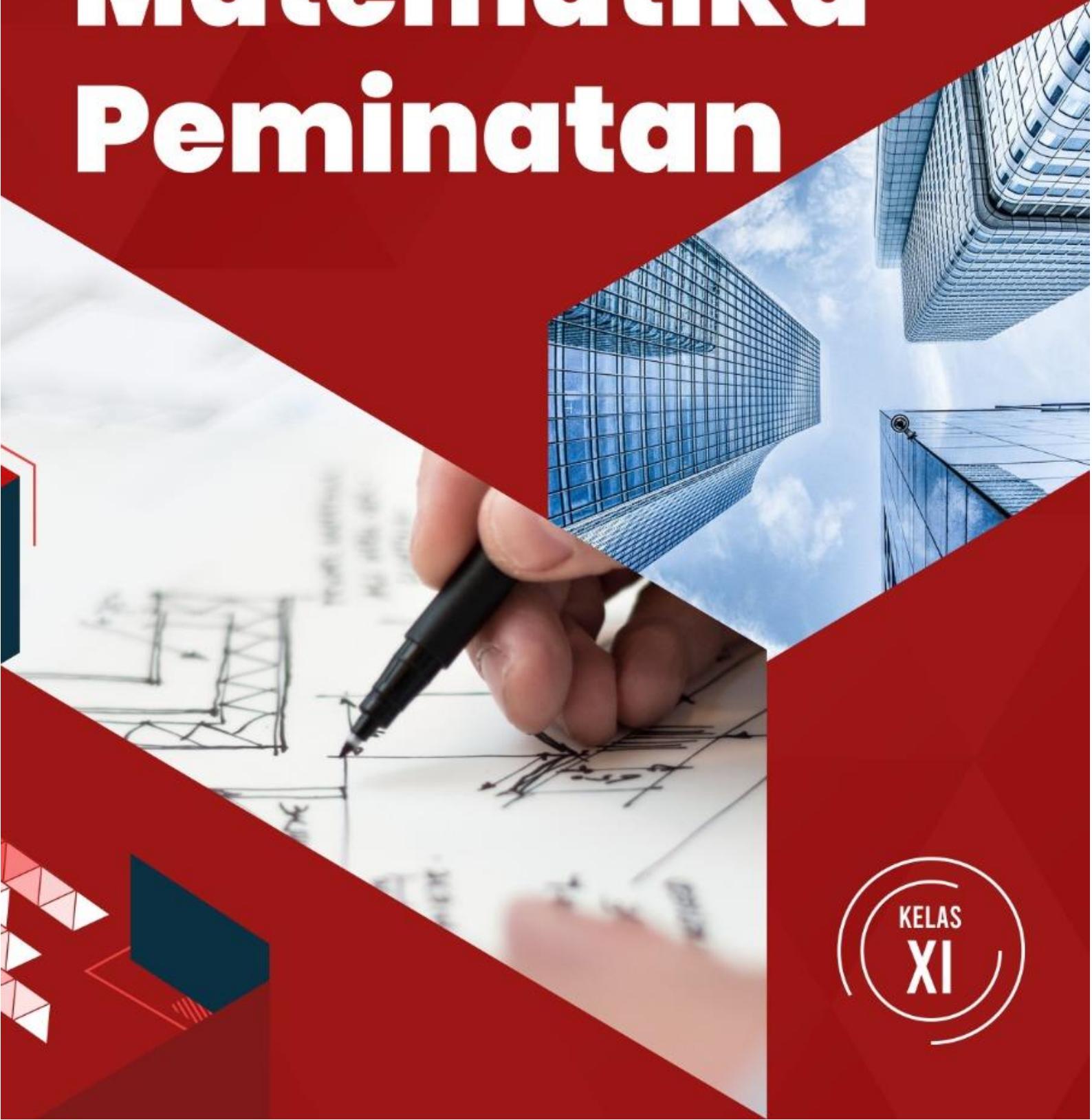
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

PERSAMAAN TRIGONOMETRI

MATEMATIKA PEMINATAN KELAS XI

PENYUSUN
Titin Suryati Sukmadewi, S.Si., M.Pd.

Unit Kerja:

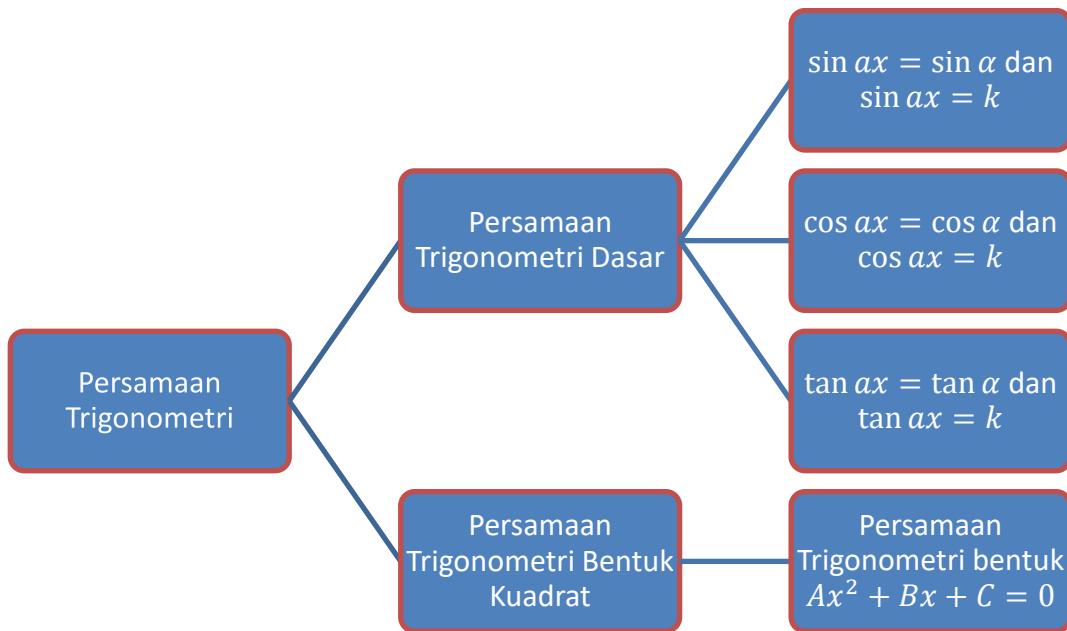
SMA Negeri 1 Sumedang

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

- Fungsi trigonometri adalah fungsi dari sebuah sudut yang digunakan untuk menghubungkan antara sudut-sudut yang dalam suatu segitiga dengan sisi-sisi segitiga tersebut.
- Himpunan penyelesaian adalah himpunan yang beranggotakan akar-akar dari suatu persamaan.
- Persamaan trigonometri adalah persamaan yang memuat perbandingan trigonometri.
- Persamaan trigonometri bentuk kuadrat adalah persamaan trigonometri dalam bentuk $Ax^2 + Bx + C = 0, A \neq 0$

PETA KONSEP

Persamaan Trigonometri
Persamaan Trigonometri Dasar
Persamaan Trigonometri Bentuk Kuadrat
$\sin ax = \sin \alpha$ dan $\sin ax = k$
$\cos ax = \cos \alpha$ dan $\cos ax = k$
$\tan ax = \tan \alpha$ dan $\tan ax = k$
Persamaan Trigonometri bentuk $Ax^2 + Bx + C = 0$

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran : Matematika Peminatan
Kelas : XI
Alokasi Waktu : 8 JP
Judul Modul : Persamaan Trigonometri

B. Kompetensi Dasar

3.1 Menjelaskan dan menentukan penyelesaian persamaan trigonometri
4.1 Memodelkan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan masalah trigonometri

C. Deskripsi Singkat Materi

Modul ini berisi materi persamaan trigonometri yang merupakan pengembangan dari fungsi trigonometri dengan nilai $y = 0$. Materi prasyarat yang harus dikuasai adalah nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa, nilai perbandingan trigonometri di empat kuadran, invers trigonometri dan penyelesaian persamaan kuadrat. Setelah memahami modul ini diharapkan dapat menentukan penyelesaian persamaan trigonometri baik persamaan dasar maupun persamaan kuadrat. Materi ini akan menjadi prasyarat perhitungan terutama pada mata pelajaran fisika.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum Ananda membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebelum memulai menggunakan modul, mari berdoa kepada Tuhan yang Maha Esa agar diberikan kemudahan dalam memahami materi ini dan dapat mengamalkan dalam kehidupan sehari-hari.
2. Sebaiknya Ananda mulai membaca dari pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secara berurutan.
3. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, Ananda mengerjakan latihan soal dengan jujur tanpa melihat uraian materi.
4. Ananda dikatakan tuntas apabila dalam mengerjakan latihan soal memperoleh nilai ≥ 75 sehingga dapat melanjutkan ke materi selanjutnya.
5. Jika Ananda memperoleh nilai < 75 maka Ananda harus mengulangi materi pada modul ini dan mengerjakan kembali latihan soal yang ada.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Persamaan Trigonometri Dasar

Kedua : Persamaan Trigonometri Bentuk Kuadrat

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Persamaan Trigonometri Dasar

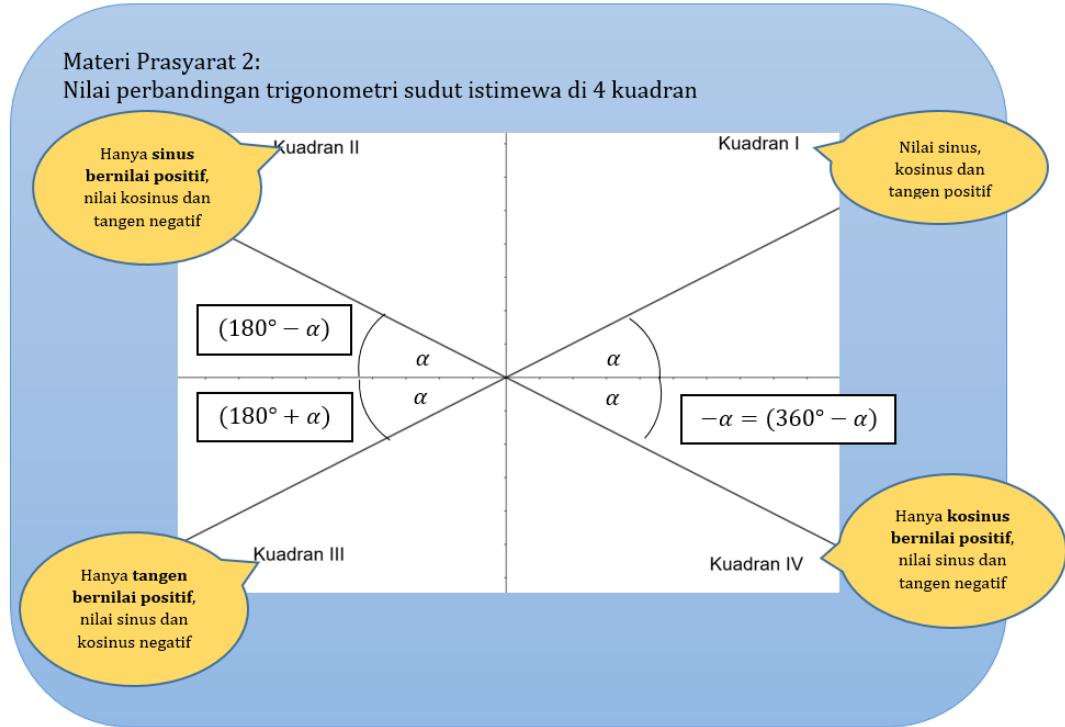
A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi ini, diharapkan Ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri dasar

B. Uraian Materi

Jika ananda menyelesaikan suatu persamaan trigonometri, berarti ananda diharuskan menemukan nilai x, dalam satuan radian maupun derajat, yang memenuhi persamaan tersebut.
Sebelum memasuki materi, ada materi prasyarat yang harus ananda kuasai yaitu sebagai berikut.

Materi Prasyarat 1:
Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut istimewa

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	~

Untuk memeriksa kesiapan kalian memasuki materi ini, kerjakanlah soal berikut.

Tentukanlah nilai perbandingan trigonometri berikut.

1. $\sin 60° =$
2. $\cos 45° =$
3. $\tan 30° =$
4. $\cos 135° =$
5. $\cos 210° =$
6. $\cos 300° =$
7. $\sin 120° =$
8. $\sin 240° =$
9. $\sin 310° =$
10. $\tan 315° =$

Persamaan Trigonometri Dasar

Persamaan trigonometri dasar meliputi:

1. $\sin x = \sin \alpha$
2. $\cos x = \cos \alpha$
3. $\tan x = \tan \alpha$
4. $\sin x = k$, k sebuah konstanta
5. $\cos x = k$, k sebuah konstanta
6. $\tan x = k$, k sebuah konstanta

Penyelesaian persamaan trigonometri dasar

Menyelesaikan persamaan trigonometri dalam bentuk kalimat terbuka yang memuat variabel berarti menentukan nilai variabel yang terdapat dalam persamaan tersebut sehingga persamaan itu menjadi benar.

Untuk menyelesaikan persamaan trigonometri $\sin x = \sin \alpha$, $\cos x = \cos \alpha$ dan $\tan x = \tan \alpha$, perhatikan tanda (positif atau negatif) untuk $\sin x, \cos x, \tan x$ pada tiap kuadran dan sudut berelasi pada kuadran masing-masing.

Menentukan penyelesaian persamaan trigonometri dasar

a. $\sin x = \sin \alpha°$
Nilai sinus suatu sudut positif di kuadran 1 dan 2 sehingga untuk persamaan $\sin x = \sin \alpha°$ penyelesaiannya adalah:
$$x = \begin{cases} \alpha° + k.360° ---------- (Kuadran\ 1) \\ (180 - \alpha)° + k.360° ----- (Kuadran\ 2) \end{cases}$$

b. $\cos x = \cos \alpha°$
Nilai cosinus suatu sudut positif di kuadran 1 dan 4 sehingga untuk persamaan $\cos x = \cos \alpha°$ penyelesaiannya adalah:
$$x = \begin{cases} \alpha° + k.360° ---------- (Kuadran\ 1) \\ (-\alpha)° + k.360° -------- (Kuadran\ 4) \end{cases}$$

c. $\tan x = \tan \alpha°$
Nilai tangen suatu sudut positif di kuadran 1 dan 3 sehingga untuk persamaan $\cos x = \cos \alpha°$ penyelesaiannya adalah:
$$x = \alpha° + k.180° ------(Kuadran\ 1\ dan\ 3)$$

Begitu pula untuk bentuk sudut dalam radian.

a. $\sin x = \sin \alpha$
$$x = \begin{cases} \alpha + k.2\pi ---------- (Kuadran\ 1) \\ (\pi - \alpha) + k.2\pi -------- (Kuadran\ 2) \end{cases}$$

b. $\cos x = \cos \alpha$
$$x = \begin{cases} \alpha + k.2\pi ---------- (Kuadran\ 1) \\ (-\alpha) + k.2\pi ---------(Kuadran\ 4) \end{cases}$$

c. $\tan x = \tan \alpha$
$$x = \alpha + k.\pi -------- (Kuadran\ 1\ dan\ 3)$$

Agar lebih jelas, coba Ananda simak contoh berikut.

Contoh 1:
Tentukan akar-akar dari persamaan trigonometri berikut kemudian tuliskan himpunan penyelesaiannya.

1. $\sin x = \sin 70°, 0° \le x \le 360°$
2. $\cos x = \cos 60°, 0° \le x \le 360°$
3. $\tan x = \tan 20°, 0° \le x \le 360°$
4. $\sin 2x = \sin \frac{2}{3}\pi, 0 \le x \le 2\pi$
5. $\cos 3x = \cos \frac{1}{2}\pi, 0 \le x \le \pi$
6. $\tan 2x - \tan \frac{1}{3}\pi = 0, 0 \le x \le 2\pi$

Alternatif penyelesaian:

1. $\sin x = \sin 70°, 0° \le x \le 360°$
$x_1 = 70°$
$x_2 = (180 - 70)° = 110°$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{70°, 110°\}$

2. $\cos x = \cos 60°, 0° \le x \le 360°$

$x_1 = 60°$
$x_2 = -60° + 360° = 300°$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{60°, 300°\}$

3. $\tan x = \tan 20°, 0° \leq x \leq 360°$
   $x = 20° + k.180°$
   Untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = 20°$
   Untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = 20° + 180° = 200°$
   Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{20°, 200°\}$

4. $\sin 2x = \sin \frac{2}{3}\pi, 0 \leq x \leq 2\pi$
   a. $2x = \frac{2}{3}\pi + k.2\pi$
      $x = \frac{1}{3}\pi + k.\pi$
      untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = \frac{1}{3}\pi$
      untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = \frac{1}{3}\pi + \pi = \frac{4}{3}\pi$
   b. $2x = \left(\pi - \frac{2}{3}\pi\right) + k.2\pi$
      $x = \frac{1}{6}\pi + k.\pi$
      untuk $k = 0$ diperoleh $x_3 = \frac{1}{6}\pi$
      untuk $k = 1$ diperoleh $x_4 = \frac{7}{6}\pi$
      Dari pengerjaan di atas diperoleh himpunan penyelesaiannya yaitu $\left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi\right\}$

5. $\cos 3x = \cos \frac{1}{2}\pi, 0 \leq x \leq \pi$
   a. $3x = \frac{1}{2}\pi + k.2\pi$
      $x = \frac{1}{6}\pi + k.\frac{2}{3}\pi$
      untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = \frac{1}{6}\pi$
      untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = \frac{5}{6}\pi$
   b. $3x = -\frac{1}{2}\pi + k.2\pi$
      $x = -\frac{1}{6}\pi + k.\frac{2}{3}\pi$
      untuk $k = 1$ diperoleh $x_3 = \frac{1}{2}\pi$
      Dari pengerjaan di atas diperoleh himpunan penyelesaiannya yaitu $\left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$

6. $\tan 2x - \tan \frac{1}{3}\pi = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$
   $\tan 2x = \tan \frac{1}{3}\pi, 0 \leq x \leq 2\pi$
   $2x = \frac{1}{3}\pi + k.\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + k.\frac{1}{2}\pi$
untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = \frac{1}{6}\pi$
untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = \frac{2}{3}\pi$
Himpunan penyelesaian dari persamaan di atas adalah $\left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{2}{3}\pi\right\}$

Contoh 2:
Tentukan akar-akar dari persamaan trigonometri berikut kemudian tuliskan himpunan penyelesaiannya.
1. $2\cos x - \sqrt{3} = 0, 0° \leq x \leq 360°$
2. $\sin(x - 30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0° \leq x \leq 360°$
3. $\sqrt{3}\sin x = \cos x, 0° \leq x \leq 360°$

Alternatif Penyelesaian:
1. $2\cos x - \sqrt{3} = 0, 0° \leq x \leq 360°$
   $2\cos x = \sqrt{3}$
   $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
   a. $x = 30° + k.360°$
      untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = 30°$
   b. $x = -30° + k.360°$
      untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = 330°$
   Himpunan penyelesaiannya adalah $\{30°, 330°\}$

2. $\sin(x - 30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0° \leq x \leq 360°$
   $\sin(x - 30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60°$
   a. $(x - 30°) = 60° + k.360°$
      $x = 90° + k.360°$
      untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = 90°$
   b. $(x - 30°) = (180° - 60°) + k.360°$
      $(x - 30°) = 120° + k.360°$
      $x = 150° + k.360°$
      untuk $k = 0$ diperoleh $x_2 = 150°$
   Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{90°, 150°\}$

3. $\sqrt{3}\sin x = \cos x, 0° \leq x \leq 360°$
   $\sqrt{3}\sin x = \cos x$
   $\sqrt{3}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}$
   $\sqrt{3}\tan x = 1$
   $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
   $\tan x = \tan 30°$
   $x = 30° + k.180°$
   untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = 30°$

untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = 210°$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{30°, 210°\}$

Kita sudah bahas persamaan trigonometri untuk bentuk:
1. $\sin x = \sin \alpha$
2. $\cos x = \cos \alpha$
3. $\tan x = \tan \alpha$
4. $\sin x = k$, k sebuah konstanta
5. $\cos x = k$, k sebuah konstanta
6. $\tan x = k$, k sebuah konstanta

Bagaimana jika salah satu dari ruas kiri maupun ruas kanan bernilai negatif? Kita akan coba bahas contoh berikut.

Contoh 3:

$\sin 2x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0 \leq x \leq 2\pi$

Penyelesaian:

$\sin 2x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Nilai sinus suatu sudut negatif berarti sudutnya berada di kuadran III dan IV

(Ingat, $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin\frac{1}{3}\pi$)

Kuadran III
$2x = \left(\pi + \frac{1}{3}\pi\right) + k.2\pi$
$2x = \frac{4}{3}\pi + k.2\pi$
$x = \frac{2}{3}\pi + k.\pi$
untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = \frac{2}{3}\pi$
untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = \frac{5}{3}\pi$

Kuadran IV
$2x = -\frac{1}{3}\pi + k.2\pi$
$x = -\frac{1}{6}\pi + k.\pi$
untuk $k = 1$ diperoleh $x_3 = \frac{5}{6}\pi$
untuk $k = 2$ diperoleh $x_4 = \frac{11}{6}\pi$

Sehingga himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$

C. Rangkuman

Menentukan penyelesaian persamaan trigonometri dasar untuk sudut ukuran derajat:

a. $\sin x = \sin \alpha°$

$$x = \begin{cases} \alpha° + k.360° ---------- (Kuadran\ 1) \\ (180 - \alpha)° + k.360° ----- (Kuadran\ 2) \end{cases}$$

b. $\cos x = \cos \alpha°$

$$x = \begin{cases} \alpha° + k.360° ---------- (Kuadran\ 1) \\ (-\alpha)° + k.360° -------- (Kuadran\ 4) \end{cases}$$

c. $\tan x = \tan \alpha°$

$$x = \alpha° + k.180° ------(Kuadran\ 1\ dan\ 3)$$

Menentukan penyelesaian persamaan trigonometri dasar untuk sudut ukuran radian:

a. $\sin x = \sin \alpha$

$$x = \begin{cases} \alpha + k.2\pi ---------- (Kuadran\ 1) \\ (\pi - \alpha) + k.2\pi -------- (Kuadran\ 2) \end{cases}$$

b. $\cos x = \cos \alpha$

$$x = \begin{cases} \alpha + k.2\pi ---------- (Kuadran\ 1) \\ (-\alpha) + k.2\pi ---------(Kuadran\ 4) \end{cases}$$

D. Latihan Soal

Latihan Soal Bentuk Essay
Tentukan himpunan penyelesaian dari setiap persamaan berikut.

1. $\tan(2x - 35°) = 1, 0° \leq x \leq 360°$
2. $\tan(3\alpha - 15°) = -1, 0° \leq \alpha \leq 180°$
3. $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$
4. $\sin(3x - 30°) = -\frac{1}{2}, 0° \leq x \leq 180°$

Latihan Soal Bentuk Pilihan Ganda
Pilihlah satu jawaban yang paling benar.

1. Jika $\sin x = \sin p$, maka salah satu penyelesaian persamaan tersebut adalah $x =$ ....

A. $p + k\pi, k \in$ bilangan bulat
B. $-p + k\pi, k \in$ bilangan bulat
C. $p + k.2\pi, k \in$ bilangan bulat
D. $(180° + p) + k.2\pi, k \in$ bilangan bulat
E. $(180° - p) + k.2\pi, k \in$ bilangan bulat

2. Himpunan penyelesaian dari $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$ adalah ....

A. $\left\{\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi\right\}$
B. $\left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi\right\}$
C. $\left\{\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$
D. $\left\{\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$
E. $\left\{\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right\}$

3. Yang bukan penyelesaian dari persamaan $\sin 3x = 0$ untuk $0° \leq x < 360°$ adalah ....

A. 0°
B. 60°
C. 120°
D. 240°
E. 270°

4. Himpunan penyelesaian dari persamaan $\tan 3x - \tan\frac{4}{3}\pi = 0$ adalah ....

A. $\left\{x \middle| x = \frac{\pi}{9}(4 + 3k), k \in bulat\right\}$
B. $\left\{x \middle| x = -\frac{\pi}{9}(4 + 3k), k \in bulat\right\}$
C. $\left\{x \middle| x = \frac{4\pi}{9} + k.\pi, k \in bulat\right\}$
D. $\left\{x \middle| x = \frac{4\pi}{3} + k.\pi, k \in bulat\right\}$
E. $\left\{x \middle| x = \frac{4\pi}{3} + k.\frac{\pi}{3}, k \in bulat\right\}$

5. Himpunan penyelesaian dari persamaan $\sin(x - 60°) = \cos 2x$ untuk $0° \leq x \leq 360°$ adalah ....
   A. $\{70°, 170°, 210°, 250°\}$
   B. $\{70°, 190°, 210°, 250°\}$
   C. $\{50°, 190°, 250°, 290°\}$
   D. $\{50°, 170°, 210°, 290°\}$
   E. $\{50°, 170°, 250°, 290°\}$

Kunci Jawaban dan Pembahasan

Kunci Jawaban Soal Latihan Bentuk Essay

1. $\tan(2x - 35°) = 1, 0° \leq x \leq 360°$

(SKOR MAKSIMUM 10)

$2x - 35° = 45° + k.180°$
$2x = 80° + k.180°$
$x = 40° + k.90°$ (untuk k bilangan bulat)
$x_1 = 40°$
$x_2 = 40° + 90° = 130°$
$x_3 = 40° + 180° = 220°$
$x_4 = 40° + 270° = 310°$
HP = {40°,130°,220°,310°}

2. $\tan(3\alpha - 15°) = -1, 0° \leq \alpha \leq 180°$

(SKOR MAKSIMUM 10)

$(3\alpha - 15°) = 135° + k.180°$
$3\alpha = 150° + k.180°$
$\alpha = 50° + k.60°$
$\alpha_1 = 50°$
$\alpha_2 = 50° + 60° = 110°$
$\alpha_3 = 50° + 120° = 170°$
HP = {60°, 110°, 170°}

3. $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$

(SKOR MAKSIMUM 15)

$2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
Kosinus Positif di Kuadran I
$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k.2\pi$
$2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + k.2\pi$
$2x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$
$x = \frac{\pi}{4} + k.\pi$
$x_1 = \frac{\pi}{4} + 0.\pi = \frac{\pi}{4}$
$x_2 = \frac{\pi}{4} + 1.\pi = \frac{5\pi}{4}$
Kosinus Positif di Kuadran IV
$2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k.2\pi$
$2x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi$

$x = \frac{\pi}{12} + k.\pi$
$x_3 = \frac{\pi}{12} + 0.\pi = \frac{\pi}{12}$
$x_4 = \frac{\pi}{12} + 1.\pi = \frac{13\pi}{12}$
HP $= \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}\right\}$

4. $\sin(3x - 30°) = -\frac{1}{2}, 0° \leq x \leq 180°$

(SKOR MAKSIMUM 15)

Nilai sinus negatif di kuadran III dan IV
Kuadran III
$3x - 30° = 240° + k.360°$
$3x = 270° + k.360°$
$x = 90° + k.120°$
$x_1 = 90°$
Kuadran IV
$3x - 30° = 300° + k.360°$
$3x = 330° + k.360°$
$x = 110° + k.120°$
$x = 110° + 0.120° = 110°$
HP = {90°, 110°}

Kunci Jawaban Soal Bentuk Pilihan Ganda

1. Kunci : C
Pembahasan
$\sin x = \sin p$
$x = p + k.2\pi$ dan $x = (\pi - p) + k.2\pi$
2. Kunci: E
$2\sin x - \sqrt{3} = 0$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$
$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
Kuadran I:

$x = \frac{\pi}{3} + k.2\pi$
$x_1 = \frac{\pi}{3} + 0.2\pi = \frac{\pi}{3}$
Kuadran II:
$x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + k.2\pi$
$x = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi$
$x_2 = \frac{2\pi}{3} + 0.2\pi = \frac{2\pi}{3}$
HP $= \left\{\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right\}$
3. Kunci: E

$\sin 3x = 0$
$3x = k.360°$
$x = k.120°$
$x_1 = 0°$
$x_2 = 120°$
$x_3 = 240°$
$\sin 3x = 0$
$3x = 180° + k.360°$
$x = 60° + k.120°$
$x_4 = 60°$
$x_5 = 180°$
$x_6 = 300°$
Jadi yang tidak memenuhi adalah 270°.

4. Kunci: A
   Pembahasan:
   $\tan 3x - \tan \frac{4}{3}\pi = 0$
   $\tan 3x = \tan \frac{4}{3}\pi$
   $3x = \frac{4}{3}\pi + k.\pi$
   $x = \frac{4}{9}\pi + k.\frac{1}{3}\pi$
   $x = \frac{\pi}{9}(4 + 3k)$
5. Kunci: D
   Pembahasan:
   $\sin(x - 60°) = \cos 2x$ untuk $0° \leq x \leq 360°$
   $\sin(x - 60°) = \cos\big(90° - (x - 60°)\big)$
   $\sin(x - 60°) = \cos(150° - x)$
   $\cos(150° - x) = \cos 2x$

   $2x = 150° - x + k.360°$
   $3x = 150° + k.360°$
   $x = 50° + k.120°$
   $x_1 = 50°$
   $x_2 = 170°$
   $x_3 = 290°$

   $2x = -(150° - x) + k.360°$
   $2x = x - 150° + k.360°$
   $x = -150° + k.360°$
   $x_4 = 210°$
   HP= $\{50°, 170°, 210°, 290°\}$

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri $\sin x = k$?	Ya	Tidak
2	Apakah ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri $\cos x = k$?	Ya	Tidak
3	Apakah ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri $\tan x = k$?	Ya	Tidak
4	Apakah ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri dasar untuk interval dalam bentuk radian?	Ya	Tidak
5	Apakah ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri $\sin ax = k$?	Ya	Tidak
6	Apakah ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri $\cos ax = k$?	Ya	Tidak
7	Apakah ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri $\tan ax = k$?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan riview pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Persamaan Trigonometri Bentuk Kuadrat

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi ini, diharapkan Ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri berbentuk $Ax^2 + Bx + C = 0, A \neq 0$.

B. Uraian Materi

Persamaan trigonometri terkadang ada yang berbentuk persamaan kuadrat, atau mengharuskan kita untuk mengubah bentuknya menjadi persamaan kuadrat sehingga penyelesaian bisa kita peroleh dengan menggunakan aturan dalam persamaan kuadrat. Pengubahan bentuk persamaan trigonometri ke bentuk persamaan kuadrat trigonometri memerlukan wawasan Ananda tentang identitas trigonometri seperti misalnya:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

Jika ada kata persamaan kuadrat, tentu saja diperlukan kompetensi untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat tersebut, misalnya dengan pemfaktoran maupun melengkapkan kuadrat sempurna.
Perlu diingat pula rentang nilai untuk sinus dan cosinus adalah:

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$$
$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

Agar lebih jelas, cermati beberapa contoh berikut.

Contoh 1:
Tentukan himpunan penyelesaian untuk $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ untuk $0° \leq x \leq 360°$

Alternatif penyelesaian:
Misal $p = \cos x$
$\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$
$p^2 - p - 2 = 0$
$(p-2)(p+1) = 0$
$p_1 = 2$ atau $p_2 = -1$
$\cos x = 2$ atau $\cos x = -1$
($\cos x = 2$ tidak memenuhi)
Sehingga $\cos x = -1$
$x = 180° + k.360°$
diperoleh nilai $x = 180°$ atau himpunan penyelesaiannya $\{180°\}$

Ingat, nilai $-1 \leq \cos x \leq 1$

Contoh 2:
$2 - 2\cos^2\alpha = \sin\alpha$ untuk $0° \leq \alpha \leq 360°$

Alternatif penyelesaian:
$2 - 2\cos^2\alpha = \sin\alpha$
$2(1 - \cos^2\alpha) = \sin\alpha$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$2\sin^2\alpha = \sin\alpha$
$2\sin^2\alpha - \sin\alpha = 0$
$\sin\alpha(2\sin\alpha - 1) = 0$

$\sin\alpha = 0$ atau $\sin\alpha = \frac{1}{2}$

a. $\sin\alpha = 0$
   $\alpha = 0° + k.360°$
   untuk $k = 0$ diperoleh $\alpha_1 = 0°$
   untuk $k = 1$ diperoleh $\alpha_2 = 360°$
   $\alpha = 180° + k.360°$
   untuk $k = 0$ diperoleh $\alpha_3 = 180°$

b. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$
   Kuadran I $\quad \alpha = 30° + k.360°$
   untuk $k = 0$ diperoleh $\alpha_4 = 30°$
   Kuadran II $\quad \alpha = (180° - 30°) + k.360°$
   $\alpha = 150° + k.360°$
   untuk $k = 0$ diperoleh $\alpha_5 = 150°$

Himpunan penyelesaian dari persamaan di atas adalah $\{0°, 30°, 150°, 180°, 360°\}$

C. Rangkuman

Hal yang harus diperhatikan dalam mencari solusi persamaan trigonometri berbentuk $Ax^2 + Bx + C = 0$

1. Rentang nilai sinus dan kosinus:
$$-1 \le \sin\alpha \le 1$$
$$-1 \le \cos\alpha \le 1$$
2. Identitas trigonometri yang membantu penyelesaian
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

E. Latihan Soal

Latihan Soal Bentuk Essay
Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri berikut.

1. $2\sin^2 2x - 7\sin 2x + 3 = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$
2. $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$, $-180° \leq x \leq 180°$
3. $2\sin^2 x - 9\cos x + 3 = 0$, $0° \leq x \leq 360°$
4. $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$, $0° \leq x \leq 360°$

Latihan Soal Bentuk Pilihan Ganda
Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Jika $\tan^2 x - \tan x - 6 = 0$ untuk $0 < x < \pi$, maka nilai $\sin x$ adalah ....
   A. $\left\{\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right\}$
   B. $\left\{\frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right\}$
   C. $\left\{-\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right\}$
   D. $\left\{\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$
   E. $\left\{\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right\}$

2. Semua solusi real dari persamaan $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$ adalah ....
   A. $2\pi k, k \in Bulat$
   B. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Bulat$
   C. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Bulat$
   D. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Bulat$
   E. $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Bulat$

3. Nilai $\sin x$ dari $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ yang memenuhi untuk $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ adalah ....
   A. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   B. $-\frac{1}{2}$
   C. $\frac{1}{2}$
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   E. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

4. Berikut adalah himpunan penyelesaian persamaan kuadrat trigonometri $2\sin^2 2x - 7\sin 2x + 3 = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$, kecuali ....
   A. $\frac{\pi}{12}$
   B. $\frac{5\pi}{12}$
   C. $\frac{8\pi}{12}$
   D. $\frac{13\pi}{12}$
   E. $\frac{17\pi}{12}$

5. Himpunan penyelesaian dari persamaan $2\sin^2 x - 9\cos x + 3 = 0$ untuk $0° \leq x \leq 360°$ adalah ....
   A. $\{30°, 60°\}$
   B. $\{30°, 300°\}$
   C. $\{30°, 330°\}$
   D. $\{60°, 300°\}$
   E. $\{60°, 330°\}$

Kunci Jawaban dan Pembahasan

Pembahasan Latihan Soal Bentuk Essay

1. $2\sin^2 2x - 7\sin 2x + 3 = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$

   (SKOR MAKSIMUM 10)

   Misalkan $y = \sin 2x$
   $2y^2 - 7y + 3 = 0$
   $(2y - 1)(y - 3) = 0$
   $y = \frac{1}{2}$ atau $y = 3$ tidak memenuhi karena nilai sinus berkisar dari -1 sampai 1
   $y = 3$ tidak memenuhi karena nilai sinus berkisar dari -1 sampai 1
   $\sin 2x = \frac{1}{2}$
   $2x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi$ ……. (Kuadran I)
   $x = \frac{\pi}{12} + k.\pi$
   $x_1 = \frac{\pi}{12} + 0.\pi = \frac{\pi}{12}$
   $x_2 = \frac{\pi}{12} + 1.\pi = \frac{13\pi}{12}$

   $2x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + k.2\pi$ ……. (Kuadran II)
   $2x = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi$
   $x = \frac{5\pi}{12} + k.\pi$
   $x_3 = \frac{5\pi}{12} + 0.\pi = \frac{5\pi}{12}$
   $x_4 = \frac{5\pi}{12} + 1.\pi = \frac{17\pi}{12}$
   HP= $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$

2. $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$, $-180° \leq x \leq 180°$

   (SKOR MAKSIMUM 10)

   Misal $p = \cos x$
   $4p^2 - 4p - 3 = 0$
   $(2p + 1)(2p - 3) = 0$
   $p = -\frac{1}{2}$ atau $p = \frac{3}{2}$
   $p = \frac{3}{2}$ tidak memenuhi karena nilai sinus berkisar dari -1 sampai 1
   $\cos x = -\frac{1}{2}$
   $x = (180° - 60°) + k.360°$ ……….. (Kuadran II)
   $x = 120° + k.360°$
   $x_1 = 120° + 0.360° = 120°$
   $x = (180° + 60°) + k.360°$ ……….. (Kuadran III)
   $x = (240°) + k.360°$
   $x_2 = 240° + (-1).360° = -120°$

   HP $= \{-120°, 120°\}$

3. $2\sin^2 x - 9\cos x + 3 = 0$, $0° \leq x \leq 360°$

   (SKOR MAKSIMUM 15)

   $2(1 - \cos^2 x) - 9\cos x + 3 = 0$ …………….. (substitusi $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$)
   $2 - 2\cos^2 x - 9\cos x + 3 = 0$
   $-2\cos^2 x - 9\cos x + 5 = 0$
   $2\cos^2 x + 9\cos x - 5 = 0$
   Misal $p = \cos x$

$2p^2 + 9p - 5 = 0$
$(2p - 1)(p + 5) = 0$
$p = \frac{1}{2}$ atau $p = -5$
$p = -5$ tidak memenuhi
$p = \frac{1}{2}$
$\cos x = \frac{1}{2}$
$x = 60° + k.360°$ .... (Kuadran I)
$x_1 = 60°$
$x = -60° + k.360°$ .... (Kuadran IV)
$x_2 = 300°$
$\text{HP} = \{60°, 300°\}$

4. $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$, $0° \le x \le 360°$

(SKOR MAKSIMUM 10)

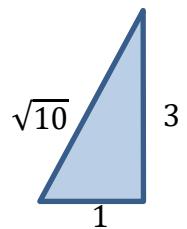
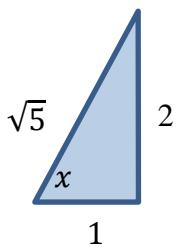
$2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$ .... (substitusi $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$)
$2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0$
$-2\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$
$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$
Misal $y = \cos x$
$2y^2 - 3y - 2 = 0$
$(2y + 1)(y - 2) = 0$
$y = -\frac{1}{2}$ atau $y = 2$
$y = 2$ tidak memenuhi
$\cos x = -\frac{1}{2}$
$\cos x = -\frac{1}{2}$
$x = (180° - 60°) + k.360°$ .... (Kuadran II)
$x = 120° + k.360°$
$x_1 = 120° + 0.360° = 120°$
$x = (180° + 60°) + k.360°$ .... (Kuadran III)
$x = (240°) + k.360°$
$x_2 = 240° + (-1).360° = -120°$

$\text{HP} = \{-120°, 120°\}$

Pembahasan Latihan Soal Bentuk Pilihan Ganda

1. Kunci : A
   Pembahasan
   $\tan^2 x - \tan x - 6 = 0$ untuk $0 < x < \pi$
   $(\tan x - 3)(\tan x + 2) = 0$
   $\tan x = 3$ atau $\tan x = -2$

x

$\tan x = 3$
$\sin x = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{10}\sqrt{10}$

$\tan x = -2, 0 < x < \pi$, ada di kuadran I dan II
Nilai $\tan x$ negatif berarti ada di kuadran II, nilai $\sin x$ di kuadran II positif
$\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$

2. Kunci : A

$\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$
$(\cos x + 2)(\cos x - 1) = 0$
$\cos x = 1$
$x = 0 + k.2\pi = 2\pi k, k \in Bulat$

3. Kunci: C

$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$(2\sin x - 1)(\sin x + 3) = 0$
$\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = -3$ tidak memenuhi

4. Kunci: C

$2\sin^2 2x - 7\sin 2x + 3 = 0$, $0 \le x \le 2\pi$
Misal $p = \sin 2x$
$2p^2 - 7p + 3 = 0$
$(2p - 1)(p - 3) = 0$
$p = \frac{1}{2}$ atau $p = 3$ (tidak memenuhi)
$\sin 2x = \frac{1}{2}$
$2x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi$ .... (Kuadran I)
$x = \frac{\pi}{12} + k.\pi$
$x_1 = \frac{\pi}{12} + 0.\pi = \frac{\pi}{12}$
$x_2 = \frac{\pi}{12} + 1.\pi = \frac{13\pi}{12}$
$2x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + k.2\pi$ .... (Kuadran II)
$2x = \left(\frac{5\pi}{6}\right) + k.2\pi$
$x = \left(\frac{5\pi}{12}\right) + k.\pi$
$x_1 = \frac{5\pi}{12} + 0.\pi = \frac{5\pi}{12}$
$x_2 = \frac{5\pi}{12} + 1.\pi = \frac{17\pi}{12}$
$\text{HP} = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$
Jadi $\frac{8\pi}{12}$ tidak ada pada himpunan penyelesaian

5. Kunci: D

$2\sin^2 x - 9\cos x + 3 = 0$ untuk $0° \le x \le 360°$
$2(1 - \cos^2 x) - 9\cos x + 3 = 0$ .... (substitusi $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$)
$-2\cos^2 x - 9\cos x + 5 = 0$
$2\cos^2 x + 9\cos x - 5 = 0$
Misal $y = \cos x$
$2y^2 + 9y - 5 = 0$
$(2y - 1)(y + 5) = 0$

$y = \frac{1}{2}$ atau $y = -5$ (tidak memenuhi)
$x = 60° + k.360°$ …………….. (Kuadran I)
$x_1 = 60°$
$x = -60° + k.360°$ …………….. (Kuadran IV)
$x_2 = 300°$
HP $= \{60°, 300°\}$

F. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah ananda dapat menentukan pemfaktoran persamaan kuadrat trigonometri?	Ya	Tidak
2	Apakah ananda dapat menentukan himpunan persamaan kuadrat trigonometri dalam rentang derajat?	Ya	Tidak
3	Apakah ananda dapat menentukan himpunan persamaan kuadrat trigonometri dalam rentang radian?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan riview pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

EVALUASI

1. Manakah di bawah ini yang bukan merupakan solusi dari $2\sin^2 x - 1 = 0$?
   A. 425°
   B. 585°
   C. 225°
   D. 135°
   E. 45°

2. Himpunan penyelesaian dari $2\sin x = 1$ untuk $0° \leq x \leq 360°$ adalah ....
   A. $\{60°\}$
   B. $\{60°, 120°\}$
   C. $\{60°, 150°\}$
   D. $\{30°, 150°\}$
   E. $\{30°, 150°, 210°\}$

3. Penyelesaian dari $\cos(40° + x) + \sin(40° + x) = 0$ untuk $0° \leq x \leq 360°$ adalah ....
   A. $x = 45°$ dan $x = 135°$
   B. $x = -95°$ dan $x = 275°$
   C. $x = 95°$ dan $x = 275°$
   D. $x = 5°$ dan $x = 95°$
   E. $x = 85°$ dan $x = 5°$

4. Himpunan penyelesaian dari $6\sin(2x + 60°) = 3$ untuk $0° \leq x \leq 180°$ adalah ....
   A. $\{30°, 150°\}$
   B. $\{45°, 165°\}$
   C. $\{15°, 150°\}$
   D. $\{30°, 60°\}$
   E. $\{120°, 135°\}$

5. Himpunan penyelesaian dari $\sin(x - 75°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dengan $0° \leq x \leq 360°$ adalah ....
   A. $\{60°, 135°\}$
   B. $\{60°, 195°\}$
   C. $\{135°, 195°\}$
   D. $\{135°, 315°\}$
   E. $\{195°, 315°\}$

6. Di bawah ini adalah himpunan penyelesaian dari persamaan $\cos 2x = \frac{1}{2}$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$, kecuali ....
   A. $\frac{10}{6}\pi$
   B. $\frac{5}{6}\pi$
   C. $\frac{7}{6}\pi$
   D. $\frac{1}{6}\pi$
   E. $\frac{11}{6}\pi$

7. Berikut adalah salah satu penyelesaian persamaan $\sin 3x = \frac{1}{2}$ untuk $0° \leq x \leq 360°$, kecuali ....
   A. 290°
   B. 250°
   C. 130°
   D. 40°
   E. 10°

8. Himpunan penyelesaian dari $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ untuk $0° \leq x \leq 360°$ adalah ....
   A. $\{60°, 120°\}$
   B. $\{30°, 150°\}$
   C. $\{120°, 240°\}$
   D. $\{150°, 210°\}$
   E. $\{240°, 300°\}$

9. Himpunan penyelesaian dari persamaan $4\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 2\cos^2 x$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$ adalah ....
   A. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$
   B. $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$
   C. $\left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$
   D. $\left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$
   E. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

10. Diketahui persamaan $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$ pada $0 < x < \frac{\pi}{2}$. himpunan penyelesaian $\sin x$ yang memenuhi adalah ....
   A. $\emptyset$
   B. $\{0\}$
   C. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$
   D. $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}$
   E. $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{3}\right\}$

Kunci Jawaban Evaluasi

1. A
2. B
3. C
4. B
5. C
6. A
7. A
8. C
9. B
10. E

DAFTAR PUSTAKA

B.K. Noormandiri, 2019. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI Kelompok Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,* Jakarta : Erlangga.

Sembiring, S. 2007. *1700 Soal Bimbingan Pemantapan Matematika SMA/MA*. Badung : Yrama Widya.

Sukino. 2016. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam.* Jakarta : Erlangga.